Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Proba 1 de Selecţie pentru Lotul Olimpic
Neptun, 15 Aprilie 2009

Problema 1. Pentru orice mulţimi nevide $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ definim $A + B$ şi $A - B$ prin

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\},\ A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

În cele ce urmează vom considera numai mulţimi finite nevide din $\mathbb{Z}$.

Demonstraţi că putem *acoperi* mulţimea B prin cel mult $\frac{|A+B|}{|A|}$ *translatate* ale mulţimii $A - A$, adică există $X \subseteq \mathbb{Z}$ cu $|X| \leq \frac{|A+B|}{|A|}$ astfel încât

$$B \subseteq \bigcup_{x \in X} (x + (A - A)) = X + A - A.$$

Problema 2. Fie o matrice cu elemente numere întregi. Numim *operaţie* adunarea unui acelaşi număr întreg la toate elementele unei linii sau la toate elementele unei coloane. Se ştie că, pentru o infinitate de numere naturale n, se poate obţine, prin aplicarea unui număr finit de operaţii, o matrice având toate elementele multipli de n.

Arătaţi că, prin aplicarea unui număr finit de operaţii, din matricea dată se poate obţine matricea nulă.

Problema 3. Un număr de $n > 2$ lămpi sunt conectate ciclic: lampa 1 cu lampa 2, $\ldots$, lampa ℓ cu lampa $\ell + 1$, $\ldots$, lampa $n - 1$ cu lampa n, lampa n cu lampa 1. La început, toate lămpile sunt stinse. Când se apasă întrerupătorul unei lămpi, acea lampă, precum şi cele două lămpi conectate cu ea, îşi schimbă starea (de la stins la aprins, sau vice-versa). Determinaţi numărul de configuraţii de lămpi care pot fi obţinute din configuraţia iniţială, prin apăsarea unui anumit număr de întrerupătoare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.